Le funzioni

Definizione

Si dice funzione una corrispondenza tra due insiemi che ad ogni elemento del primo insieme associa uno e un solo elemento appartenente al secondo insieme.

Funzione numerica

Dati gli insiemi numerici X e Y non vuoti, si chiama **funzione** da X in Y la corrispondenza tale che per ogni $x \in X$, esiste uno ed un solo elemento $y \in Y$ ($y \in Y$ *si denota anche con* $f(x)$).

Il fatto che f è una funzione da X in Y che associa a x l'elemento $f(x)$ si può esprimere con la scrittura:

$$\begin{aligned} f:\ X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

L'insieme X (da cui la funzione f "prende" i valori) è detto **dominio** della funzione f, mentre l'insieme Y (in cui si trovano i valori "restituiti" dalla funzione f) è detto **codominio** della funzione f.

Se X e Y sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, $f(x)$ è detta **funzione reale**.

La x è detta variabile ***indipendente***, mentre il numero reale y è detto variabile ***dipendente***.

Comunque scelto un elemento x del dominio si chiama ***immagine di x*** il corrispondente elemento del codominio, indicato con $f(x)$:

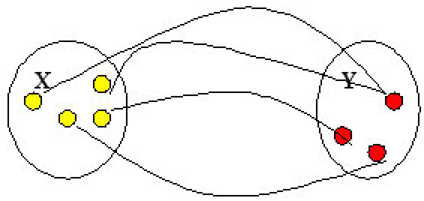
$$Im\, f = f(X) = \{\, y \in Y : \text{esiste } x \in X \text{ tale che } f(x) = y \}$$

Analogamente, se y è un elemento del codominio che sia immagine di un elemento x del dominio, cioè se $y=f(x)$, si dice che x è la ***controimmagine*** di y.

Funzione suriettiva

Una funzione $f : x \in X \subseteq R \rightarrow y \in Y \subseteq R$ la diciamo **suriettiva** quando:

$\forall y \in Y \qquad \exists x \in X \,/\, f(x) = y$.

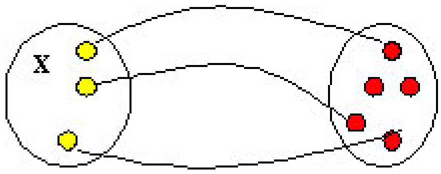


Funzione iniettiva

Una funzione $f : x \in X \subseteq R \rightarrow y \in Y \subseteq R$ la diciamo **iniettiva** quando:

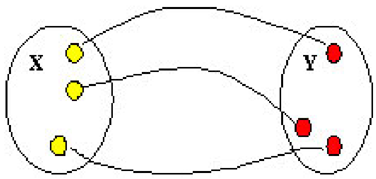
$$\forall x_1 \neq x_2 \in X \qquad f(x_1) \neq f(x_2) .$$

(ad elementi distinti corrispondono elementi distinti)



Funzione biettiva

Una funzione $f : x \in X \subseteq R \rightarrow y \in Y \subseteq R$ la diciamo **biettiva** quando è iniettiva e suriettiva.



Esempio

La funzione

$$f : x \in R \to x^2 \in R$$

è una funzione non suriettiva e non iniettiva.

Infatti $\forall x \in X \qquad f(x) = R^+$, e non a tutto il condominio R.

Inoltre non e iniettiva , infatti ad esempio per

$$y = 4 \qquad \exists x = 2 \qquad e \qquad x = -2 \qquad / \; f(2) = f(-2) = 4$$

$$\forall x \in X \qquad f(x) = [0, +\infty]$$

(l'immagine del dominio non essendo tutto R mi dice che la funzione non è suriettiva)

Invece la funzione $f : x \in R \to x^2 \in [0, +\infty]$ è suriettiva poiché $\forall x \in X \qquad f(x) = [0, +\infty]$ ma non è iniettiva poiché a 2 elementi distinti di R corrisponde lo stesso elemento (*f(x)* = *f(-x)*).

Funzione inversa

Sia data la funzione $f : X \to Y$ iniettiva, si costruisce una nuova funzione

$$f^{-1} : f(X) \to X$$

che ad ogni $\forall y \in f(X)$) associa l'unico elemento $x \in X$ tale che f (x) = y

Tale funzione f^{-1} si chiama **inversa** di *f.*

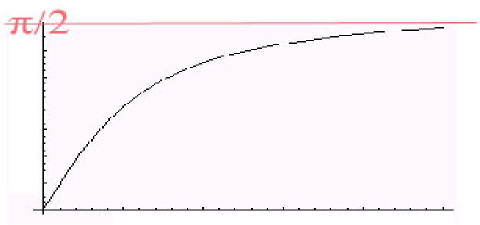
Se una funzione è *biettiva* allora esiste la funzione inversa.

Funzione limitata superiormente.

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremo che f è superiormente limitata se esiste un numero reale M tale che $\forall x \in R$ risulta $f(x) < M$, ossia il codominio $f(X)$ è un insieme limitato superiormente.

Esempio

La funzione reale $f : x \in [o,+\infty) \to arctgx$ è una funzione limitata superiormente poiché per ogni x appartenente al dominio *arctgx* risulta più piccola di $\dfrac{\pi}{2}$.



Funzione limitata inferiormente

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremo che f è inferiormente limitata se esiste un numero reale m tale che $\forall x \in R$ risulta $f(x) > m$, ossia il codominio $f(X)$ è un insieme limitato inferiormente.

Funzione limitata

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremo che f è limitata se esiste un numero reale M tale che $\forall x \in R$ risulta $|f(x)| < M$,ossia il codominio $f(X)$ è un insieme limitato.

Minimo relativo

Sia $f : X \to \mathbb{R}, \quad X \subseteq \mathbb{R}, \quad x_0 \in X$, diremo che $\mathbf{x_0}$ è un punto di **minimo relativo** se esiste un intorno I del punto x_0 tale che $\forall x \in I \subset X$ risulta che:

$$f(x_0) < f(x)$$

Minimo assoluto

Sia

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad X \subseteq \mathbb{R}, \quad x_0 \in X,$$

si dice che $\mathbf{x_0}$ punto di **minimo assoluto** se $\forall x \in X$ si ha:

$$f(x_0) < f(x).$$

Massimo relativo

Sia

$$f: X \to \mathbb{R}, \quad X \subseteq \mathbb{R}, \quad x_0 \in X,$$

diremo che $\mathbf{x_0}$ è un punto di **massimo relativo** se esiste un intorno I del punto x_0 tale che $\forall x \in I \subset X$ risulta che:

$$f(x_0) > f(x)$$

Massimo assoluto

Sia

$$f: X \to \mathbb{R}, \quad X \subseteq \mathbb{R}, \quad x_0 \in X,$$

si dice che $\mathbf{x_0}$ punto di **massimo assoluto** se $\forall x \in X$ si ha:

$$f(x_0) > f(x).$$

Funzioni monotone

Diremo che la funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **decrescente** se $\forall x_1, x_2 \in X / x_1 < x_2$ si ha che:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Diremo che la funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **crescente** se $\forall x_1, x_2 \in X / x_1 < x_2$ si ha che:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Funzione composta

Siano date le funzioni f : X $\to$ Y e g : V $\to$ Z, con Im $(f) \in$ V, si costruisce una nuova funzione

$$g \circ f : X \to Z$$

che ad ogni x $\in$ X associa il valore g(f (x)).

Tale funzione g f si chiama **funzione composta** di f e g.

Funzione pari

Sia data f : X $\rightarrow$ Y, si dice pari se per ogni $x \in X$ si ha:

$$f(-x) = f(x)$$

Se f(x) è pari allora è simmetrica rispetto all'asse y.

Funzione dispari

Sia data f : X $\rightarrow Y$,f si dice dispari se per ogni $x \in X$ si ha

$$f(-x) = -f(x)$$

Se f(x) è dispari allora è simmetrica rispetto all'origine.

Funzione periodica

Sia data f : X $\rightarrow Y$, *f* si dice periodica se per ogni $x \in X$ esiste un numero reale T tale che:

$$f(x + T) = f(x)$$

Il più piccolo numero T > 0 che verifica tale proprietà si dice periodo della funzione.